第1回　**りりちゃん模試**

数　学 (理科)

（配点 120 点）

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2　この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　解答には，必ず黒鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。

4　2 枚の解答用紙が渡されますが，青色刷りの第 1 解答用紙には，第 1 問～第 3 問について，茶色刷りの第 2 解答用紙には，第 4 問～第 6 問について解答しなさい。

5　**解答用紙の指定欄に，受験番号 (表面 2 箇所，裏面 1 箇所)，科類，氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。**

6　**解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。**

7　**解答用紙の指定欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。**

8　この問題冊子の余白は，計算用に使用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。

9　解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

10　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　1　問

座標平面上において， $C : y = ax^2 + bx + c$ と， C と 2 つの点を共有するような直線 $y = m$ について考える。

(1)　二次方程式の解の公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

が成り立つことを示せ。

また，全ての実数 a， b， c に対し， x の方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解を求めよ。

(2)　C と直線 $y = m$ の共有点の座標を求めよ。

(3)　(2) で求めた共有点を x 座標の小さい方からＡ，Ｂとし，そのときの x 座標を x_{A}， x_{B} とする。また， C の頂点をＤとする。3 点Ａ，Ｂ，Ｄを結んでできる三角形ＡＢＤの面積を S， C と直線 $y = m$ で囲まれた部分の面積を T とするとき，実数 k を用いて $T = kS$ と表されることを示し， k の値を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　2　問

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = -2$$

$$S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1} = 4n - 2 \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots\cdots)$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(1)　一般項 a_n および S_n を求めよ。

(2)　$b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k a_k$ と定める。b_n を n を用いて表せ。

(3)　(2) で求めた b_n に対し，$c_n = \dfrac{b_n + 6}{b_{n+1} + 6}$ と定める。次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \to \infty} c_3 c_4 c_5 \cdots\cdots c_n$$

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　3　問

$\dfrac{1}{e^4} \leqq x \leqq \pi$ とする。関数

$$f(x) = \sin(\log x) + \cos(\log x)$$

について，以下の問いに答えよ。必要であれば， $2 < e < 3$ ， $3.14 < \pi < 3.15$ であることを用いてよい。

(1)　$I = \displaystyle\int \sin(\log x)\,dx$ とする。I の不定積分を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ の増減，凹凸を調べ，座標平面上に概形を図示せよ。

(3)　関数 $f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　4　問

n，k が $0 \leqq k \leqq n$ を満たす整数，x が 0 を除く実数のとき，$(x+1)^n$ の x^k の係数が最大のものを a_n とする。さらに，これを数列 $\{a_n\}$ と定める。

たとえば，

- $n=0$ のとき，$(x+1)^0=1$ より $a_0=1$
- $n=2$ のとき，$(x+1)^2=x^2+2x+1$ より $a_2=2$

である。以下の問いに答えよ。

(1)　$0 \leqq k \leqq n-1$ のとき，$\dfrac{{}_nC_{k+1}}{{}_nC_k}=1$ を満たす k を n を用いて表せ。

(2)　$1 \leqq k \leqq n-1$ のとき，$\dfrac{{}_nC_k}{{}_nC_{k-1}}<1$，$\dfrac{{}_nC_{k+1}}{{}_nC_k}>1$ を満たす k を n を用いて表せ。

(3)　$1 \leqq k \leqq n-1$ のとき，a_n の条件を満たす n を k を用いて表せ。

(4)　$a_n+a_{n+1} \leqq a_{n+2}$ であることを示せ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　5　問

座標空間において，原点OとA$(0,-1,\ 1)$と点を通る直線ℓをB$(0,\ 2,\ 1)$とし，点と点$(-2,\ 2,-3)$を通る直線をmとする。ℓ上の２点P，Qと，m上の点Rを結んでできる三角形ＰＱＲが正三角形となるようにとる。このとき，三角形ＰＱＲの面積が最小になるようなP，Q，Rの座標を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　6　問

1，2，3 と書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつ入った袋がある。その中からカードを 1 枚取り出し，書かれた数字を記録したらカードを袋の中に戻す。このとき，書かれた数字 k に対して，1 辺の長さが $\dfrac{1}{2^k}$ の立方体を用意し，次の条件 (i)，(ii)，(iii) を満たしながら積み上げる操作を n 回行う。

(i)　$n=1$ のとき，どの立方体も置くことができる。

(ii)　$n \geqq 2$ のとき，下段の立方体よりも小さい，または等しい体積の立方体を積み上げることができる。

(iii)　積み上げることができなくなったら，その時点で操作を終了する。

このとき，n 回目に積み上げることができる確率 P_n を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）